

ترکیب روش‌های تفاضل محدود و اجزاء طیفی اعمال توپوگرافی سطح آزاد در مدل‌سازی انتشار موج

امین رحیمی دلخانی^۱، پیمان پورمقدم^۲، ناصر کشاورز فرج خواه^۳

^۱ کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، aminrahimi@aut.ac.ir

^۲ استادیار، دانشگاه فردوسی مشهد، ppm1407@hotmail.com

^۳ استادیار، پژوهشگاه صنعت نفت، keshavarzn@ripipr.ir

چکیده

در این مقاله روش ترکیبی جدیدی برای مدل سازی انتشار امواج لرزه ای در زمین در حضور توپوگرافی ارائه می‌شود. در این روش از تلفیق روش‌های اجزاء طیفی (SE) و تفاضل محدود (FD) مرتبه ۸ برای حل معادله مرتبه دوم موج آکوستیک در محیط‌های دارای توپوگرافی استفاده می‌شود. از روش SL برای مدل‌سازی مرز آزاد در حضور توپوگرافی استفاده می‌شود، جایی که روش تفاضل محدود دارای محدودیت است. اعمال شرط سطح آزاد در حضور توپوگرافی با استفاده از روش SF بسیار دقیق است. از طرف دیگر روش FD مرتبه ۸ از نظر محاسباتی بهینه‌تر و سریع‌تر از روش SE است؛ لذا برای مدل‌سازی دقیق انتشار موج در درون مدل و نقاط دور از مرز سطح آزاد از روش FD مرتبه ۸ و برای مدل‌سازی انتشار موج در سطح آزاد از روش SE استفاده نمودیم. برای ترکیب دو روش یک ناحیه مشترک بین دو ناحیه FD و SF در نظر گرفته شد؛ که در این محدوده مدل‌سازی با استفاده از هر دو روش انجام می‌شود. دقت روش ترکیبی ارائه شده (SL-FD) با دو مورد از روش‌های اعمال توپوگرافی مقایسه و ارزیابی شده است. مهم‌ترین سختی و دشواری در تلفیق دو روش SE و FD تولید شبکه محاسباتی برای روش SE در حضور توپوگرافی است؛ که در این مقاله دو روش ساده برای حل این مشکل ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی، انتشار موج، تفاضل محدود، اجزاء طیفی، توپوگرافی، سطح آزاد.

Combination of finite-difference and spectral-element methods for handling free surface topography in wave propagation modeling

Amin Rahimi Dalkhani¹, Peyman P. Moghadam², Naser Keshavarz³

¹ M.Sc., Amirkabir University of Technology

² Assistant professor, Ferdowsi University of Mashhad

³ Assistant professor, Research Institute of Petroleum Industry (RIP)

Abstract

We present a new hybrid approach to simulate acoustic wave propagation in the presence of free surface topography. The method combines spectral-element method (SEM) with an eight-order finite-difference method (FDM) to solve the second-order acoustic wave equation. The SEM is applied to the free surface where the FDM has difficulty accounting for the boundary conditions. The SEM deals with free-surface boundary conditions naturally and leads to the highly accurate modeling of free-surface topography. The FDM is used to propagate waves in the interior regions where the eight-order FDM is computationally more efficient than the SEM. To couple the two methods, an interface is considered between the regions. Modeling is carried out using the two methods in this combinational region. The accuracy of the hybrid method is studied by comparing it with staircase and embedded boundary modeling methods for free-surface topography. The main difficulty of combining the spectral element method with finite difference method is the mesh generation, which we resolve it in this paper by proposing two simple solutions.

Keywords: modeling, wave propagation, finite difference, spectral element, topography, free surface.

۱ مقدمه

توپوگرافی سطح تاثیر بسیار زیادی بر نتایج مدل‌سازی انتشار امواج لرزه‌ای در زمین دارد. تاکنون روش‌های فراوانی برای اعمال شرط مرزی سطح آزاد در حضور توپوگرافی در مدل‌سازی عددی انتشار امواج لرزه‌ای در زمین با استفاده از روش تفاضل

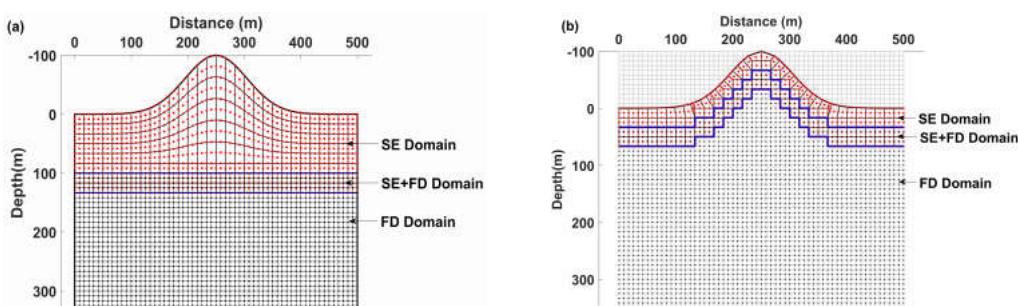
محدود پیشنهاد شده است؛ که عبارتند از: روش تصویر کردن (method Image) (لواندر، ۱۹۸۸)، تقریب پله‌ای با کوچک کردن فاصله نقاط گرهی (approximation with grid refinement method Staircase) (روبرتسون، ۱۹۹۶)، روش ترکیی تفاضل محدود-اجزاء محدود (finite difference-finite element method Hybrid) (موسزو و همکاران، ۱۹۹۷)، روش تبدیل مختصات (coordinate transformation Curvilinear) (هشتولم و راد، ۱۹۹۸؛ وانگ و لیو، ۲۰۰۷)، روش‌های مبتنی بر درون-یابی و برون-یابی (immersed boundary; embedded boundary Ghost-cell) (ستنج و فرزینگر، ۲۰۰۳؛ کریس و پترسن، ۲۰۰۶؛ هو، ۲۰۱۶) و روش اصلاح ضایعات تفاضل محدود در نزدیکی سطح زمین (surface finite difference stencil Near) (modification (مولدر، ۲۰۱۷). روش تصویر کردن فقط برای مرز صفحه‌ای و صاف و در واقع برای مدل‌های بدون توپوگرافی دقیق است. روش تقریب پله‌ای منجر به ایجاد بازتاب‌های پخش شده مصنوعی (Artificial scattering) می‌شود؛ مگر اینکه فاصله نقاط گرهی را بسیار کوچک نمود. برای کاهش موثر بازتاب‌های مصنوعی می‌باشد حداقل ۶۰ گره در کمترین طول موج در نظر گرفت؛ که منجر به افزایش هزینه محاسباتی و یا ناپایداری عددی می‌شود. دشواری تولید شبکه محاسباتی و همچنین هزینه محاسباتی روش اجزاء محدود، استفاده از روش تفاضل محدود-اجزاء محدود را محدود نموده است. مهم‌ترین اشکالات روش تبدیل مختصات عبارتند از: کارا بودن در توپوگرافی‌های بسیار ساده و هموار، ناپایداری عددی ناشی از تولید گردیدهای محلی با فاصله کوچک، افزایش دو برابری هزینه محاسباتی و مهم‌تر از همه پیچیدگی روش که نیازمند بدست آوردن معادلات موج در محیط‌های مختلف و همچنین معادلات مربوط به شرایط مرزی جاذب در مختصات جدید است. روش‌های مبتنی بر درون-یابی و برون-یابی میدان موج، با استفاده از مقادیر محاسبه شده میدان موج درون مدل، مقادیر مورد نیاز از بیرون از مدل (نقاط شبح (Ghost points)) را با شرط صفر بودن مقادیر روی توپوگرافی درونیابی یا برون-یابی می‌کنند. اساس این روش‌ها ساده است با این وجود این روش‌ها بصورت موضعی ناپایدار می‌شوند و همچنین برای توپوگرافی‌های خیلی شدید قابل استفاده نیستند (مولدر، ۲۰۱۷). مولدر (۲۰۱۷) روشی مبتنی بر اصلاح وزن‌های نقاط گرهی روش تفاضل محدود ارائه داده است؛ که فقط برای روش تفاضل محدود مرتبه دو و معادله موج آکوستیک قابل استفاده است. در این مقاله، الگوریتمی برای تلفیق دو روش تفاضل محدود و اجزاء طیفی جهت اعمال شرط مرزی سطح آزاد در حضور توپوگرافی ارائه می‌دهیم. در این روش از انعطاف‌پذیری روش SE در مواجهه با مرزهای نامنظم از جمله توپوگرافی سطح و همچنین از بازده محاسباتی روش تفاضل محدود مرتبه ۸ برای مدل‌سازی استفاده نمودیم. مهم‌ترین مشکل و سختی استفاده از روش اجزاء طیفی در مدل‌سازی انتشار موج به روش تفاضل محدود، تولید شبکه محاسباتی است؛ که با ارائه دو روش ساده حل می‌شود.

۲ ترکیب دو روش تفاضل محدود و اجزاء طیفی

روش‌های المان پایه (مانند اجزاء محدود و اجزاء طیفی) در مواجهه با مرزهای نامنظم از جمله توپوگرافی سطح بسیار انعطاف-پذیر و دقیق هستند؛ که این انعطاف‌پذیری یکی از مهم‌ترین مزیت‌های این روش‌ها در مقایسه با روش تفاضل محدود است (کوماتسیج و بیلوته، ۱۹۹۸؛ رحیمی دلخانی و همکاران، ۲۰۱۷). با این حال، این روش‌ها نیازمند حافظه و هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به روش تفاضل محدود هستند. بنابراین، روش تفاضل محدود همچنان از نقطه نظر هزینه محاسباتی بسیار پرکاربردتر از روش‌های المان پایه است. برای استفاده از انعطاف‌پذیری روش‌های المانی در مواجهه با توپوگرافی سطح آزاد و همچنین استفاده از بازده محاسباتی روش تفاضل محدود، با تقسیم محیط محاسباتی به سه زیربخش، دو روش را ترکیب و تلفیق نمودیم (مطابق شکل ۱). در محدوده SE، نزدیک توپوگرافی سطح، از حل معادله موج با استفاده از روش اجزاء طیفی استفاده نمودیم. در محدوده SE شرط مرزی سطح آزاد با صفر قرار دادن فشار در عبارت مرز در معادله انتگرالی موج اعمال می‌شود (رحیمی دلخانی، ۲۰۱۷). شرط مرزی برای پایین محدوده SE نیز آزاد در نظر گرفته شده است. در محدوده FD، ما از تقریب تفاضل محدود مرتبه ۸ برای گسته‌سازی مشتقات مکانی و از تقریب تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات زمانی معادله موج استفاده نمودیم. برای گسته‌سازی مکانی، ۴/۵ گره در کمترین طول موج در هر دو محدوده (SF و FD) در نظر گرفته شده است. یک ناحیه مشترک (SL+FD) در شکل ۱ برای برقراری ارتباط بین دو محدوده SL و FD در هر گام زمانی در نظر گرفته شده است. پهنهای این ناحیه مشترک مرزی لازم است حداقل به اندازه ۴-۵ نقطه گرهی تفاضل محدود باشد تا از بازتاب‌های مصنوعی در مرز محدوده دو روش جلوگیری نماید. در حقیقت، این ناحیه مرزی مشترک برای جلوگیری از بازتاب‌های مرزی ناشی از مرز پایین محدوده SE که مرز آزاد در نظر گرفته شده است، ضروری است. در این محدوده مشترک، معادله

موج (معادله ۱) با استفاده از هر دو روش تفاضل محدود مرتباً ۸ و اجزاء طیفی در هر گام زمانی حل می‌شود. سپس، قبلاً از رفتن به گام زمانی بعدی، ما به سادگی مقادیر میدان موج محاسبه شده با استفاده از روش SE را با مقادیر متناظر بدست آمده از روش FD جایگزین نمودیم.

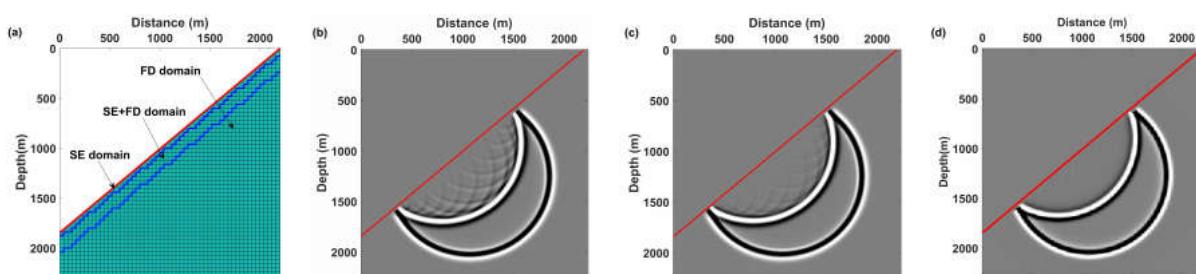
برای حل مشکل تولید شبکه محاسباتی در محدوده SE، دو روش پیشنهاد کردیم که در شکل ۱ نشان داده شده‌است. روش اول (شکل ۱(a)) در محدوده SE از المان‌های منحنی شکل مشابه شبکه محاسباتی مورد استفاده در روش تبدیل مختصات (وانگ و لیو، ۲۰۰۷) استفاده می‌نماید. استفاده از این روش و اعمال آن در برنامه‌های کامپیوتری ساده است ولی مشابه روش تبدیل مختصات برای توپوگرافی‌های ساده و هموار به خوبی کار می‌کند. با این وجود، روش پیشنهاد شده در این مقاله نسبت به روش تبدیل مختصات ارجح است؛ چراکه نیازی به تغییر و تبدیل معادلات موج به مختصات جدید نیست. از طرف دیگر، روش ارائه شده در این مقاله هزینه محاسباتی را افزایش نمی‌دهد، درحالی که روش تبدیل مختصات هزینه محاسباتی را حداقل دو برابر می‌کند؛ چراکه معادلات موج تبدیل یافته در مختصات جدید بسیار پیچیده‌تر می‌شود (وانگ و لیو، ۲۰۰۷). روش دوم (شکل ۱(b)) در ابتدا مشابه روش‌های تخمین پله‌ای و همچنین روش‌های مبتنی بر درونیابی و بروونیابی، هندسه سطح آزاد بصورت پله‌ای گسترش‌سازی می‌شود. سپس فاصله بین نقاط پله‌ای و هندسه سطح با یک ردیف المان اضافی پر می‌شود. کیفیت این روش با استفاده از المان‌های مثلثی به جای استفاده از المان‌های چهارضلعی بهبود می‌یابد. لازم به ذکر است که در پله‌ای کردن هندسه سطح مشابه مولدر (۲۰۱۷)، از این قید استفاده نمودیم که نقاطی که بسیار نزدیک به سطح با فاصله کمتر از نصف فاصله دو گره شبکه محاسباتی قرار می‌گیرند، از نقاط پله‌ای حذف می‌شوند. از طرف دیگر باید توجه داشت که تولید شبکه محاسباتی و محاسبه ماتریس‌های جرم و میرایی در الگوریتم برنامه‌نویسی روش، قبل از حلقه زمانی انجام می‌شود؛ لذا برخلاف سایر روش‌های مبتنی بر درونیابی و بروونیابی هزینه محاسباتی قابل توجهی به شبیه‌سازی اضافه نمی‌کند.



شکل ۱. شماتیک روش ترکیبی SE-FD برای اعمال توپوگرافی سطح آزاد با استفاده از دو روش مختلف تولید شبکه محاسباتی. (a) شبکه محاسباتی ساده با استفاده از المان‌های منحنی و ایده تبدیل مختصات و (b) روش پله‌ای و پر کردن فضای خالی بین شبکه پله‌ای و توپوگرافی سطح با استفاده از یک ردیف المان اضافی.

۳ مثال عددی

برای بررسی عملکرد روش پیشنهاد شده در این مقاله، ما آن را با روش پله‌ای و روش بروونیابی نقاط شبح (Embedded boundary method) (سنچ و فرزیگر، ۲۰۰۳) مقایسه نمودیم. شکل ۲(a) نشانگر یک مدل همگن با سطح شیبدار و شبکه محاسباتی متناظر با آن است. در شکل ۲(b) میدان موج منتشر شده در مدل پس از $\frac{1}{3}$ ثانیه بترتیب با استفاده از روش‌های پله‌ای، بروونیابی نقاط شبح و روش پیشنهاد شده **SE-FD** نشان داده شده است. این شکل نشان دهنده دقیق بازده روش ترکیبی **SE-FD** در مقایسه با دو روش دیگر است.



شکل ۲. (a) یک مدل همگن با سطح شبیه‌دار و شبکه محاسباتی متناظر با آن. میدان موج منتشر شده در مدل با استفاده از (b) روش پله‌ای، (c) روش برونیابی نقاط شبیه و (d) روش ترکیبی

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش ترکیبی اجزاء طیفی-تفاضل محدود برای اعمال توپوگرافی سطح آزاد در مدل‌سازی انتشار امواج لرزه‌ای در زمین پیشنهاد شد. فرایندی برای ترکیب کردن دو روش برای بهره بردن از انعطاف‌پذیری و دقیقی روش اجزاء طیفی در مزدھای نامنظم (توپوگرافی سطح) و سرعت و بازده محاسباتی روش تفاضل محدود مرتبه ۸ در درون مدل ارائه شد. روش پیشنهاد شده از روش ترکیبی تفاضل محدود-جزء محدود دارای بازده محاسباتی بیشتری است. برای حل مشکل تولید شبکه محاسباتی، دو راه حل متفاوت ارائه شد. روش المان‌های منحنی شبیه روش تبدیل مختصات عمل می‌کند و برای توپوگرافی‌های ساده و هموار قابل استفاده است با این تفاوت که دارای پیچیدگی کمتر و بازده محاسباتی بیشتری از روش تبدیل مختصات است. برای اعمال توپوگرافی‌های پیچیده‌تر، ما روش گسته‌سازی هندسه سطح بصورت پله و سپس پر کردن فضای خالی با المان‌های اضافی را پیشنهاد کردیم که کاربرد روش ترکیبی SE-FD را بهبود می‌دهد.

منابع

- Hestholm, S. and Ruud, B., 1998, 3-D finite-difference elastic wave modeling including surface topography. *Geophysics*, **63**(2), 613-622.
- Hu, W., 2016, An improved immersed boundary finite-difference method for seismic wave propagation modeling with arbitrary surface topography. *Geophysics*, **81**(6), T311-T322.
- Komatitsch, D. and Vilotte, J. P., 1998, The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bulletin of the seismological society of America*, **88**(2), 368-392.
- Kreiss, H. O. and Petersson, N. A., 2006, A second order accurate embedded boundary method for the wave equation with Dirichlet data. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **27**(4), 1141-1167.
- Levander, A. R., 1988, Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, **53**(11), 1425-1436.
- Moczo, P., Bystrický, E., Kristek, J., Carcione, J. M. and Bouchon, M., 1997, Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bulletin of the seismological Society of America*, **87**(5), 1305-1323.
- Mulder, W., 2017, A simple finite-difference scheme for handling topography with the second-order wave equation. *Geophysics*, **82**(3), T111-T120.
- Rahimi Dalkhani, A., Javaherian, A. and Mahdavi Basir, H., 2017, Frequency domain finite-element and spectral-element acoustic wave modeling using absorbing boundaries and perfectly matched layer. *Waves in Random and Complex Media*, 1-22.
- Robertsson, J. O., 1996, A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, **61**(6), 1921-1934.
- Seriani, G. and Priolo, E., 1994, Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite elements in analysis and design*, **16**(3), 337-348.
- Tseng, Y. H. and Ferziger, J. H., 2003, A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of computational physics*, **192**(2), 593-623.
- Wang, X. and Liu, X., 2007, 3-D acoustic wave equation forward modeling with topography. *Applied Geophysics*, **4**(1), 8-15.