

پیاده سازی شرایط مرزی ADE-PML در محیط TTI در حوزه زمان

بهناز سالاری^۱، پیمان پورمقدم^۲

^۱دانشجو کارشناسی ارشد، مرکز تحقیقات زمین لرزه شناسی دانشگاه فردوسی مشهد، b.salari@stu.um.ac.ir

^۲استادیار، مرکز تحقیقات زمین لرزه شناسی دانشگاه فردوسی مشهد، ppm1407@hotmail.com

چکیده

برای حل معادلات موج PML دو روش رایج با نام‌های لایه‌های کاملاً هم‌مجور هم‌آمیخت یا Convolutional (CPML) Perfectly Matched Layer(s) و معادلات دیفرانسیل کمکی PML یا Auxiliary Differential Equations Perfectly Matched Layer(s) (ADE-PML) وجود دارد. روش Nearly Perfectly Matched Layer (NPML) در سال‌های اخیر با به کارگیری تنها یک پارامتر مختلط از سه پارامتر مختلط PML پیاده‌سازی شده است، ما در این مقاله بر مبنای این روش و با استفاده از هر سه پارامتر مختلط PML روش پیشنهادی خود را پیاده‌سازی نموده‌ایم. در این مطالعه، فرمول‌هایی برای پیاده‌سازی مستقیم مرز جاذب ADE-PML بر روی معادله‌ی موج صوتی (آکوستیک) مرتبه دوم که در مباحث انتشار موج لرزه-ای از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و همچنین بر روی معادله‌ی شبه صوتی TTI ارائه کرده‌ایم. **واژه‌های کلیدی:** لایه‌های کاملاً هم‌مجور (PML)، لایه‌های کاملاً هم‌مجور هم‌آمیخت (CPML)، معادلات دیفرانسیل کمکی PML (ADE-PML)، لایه‌های کاملاً هم‌مجور تقریبی (NPML)، معادلات موج مرتبه دوم، معادلات شبه صوتی، همسانگرد جانبی شیب‌دار (TTI).

Application of absorbing boundaries to wave propagation in TTI media

Behnaz Salari¹ , Peyman P. Moghaddam²

¹ M.Sc. Student of Seismology Earthquake research center, Ferdowsi university of Mashhad.

² Assistant professor, Earthquake research center, Ferdowsi university of Mashhad

Abstract

There are two common methods for solving the equations in PML region, which are called Convolutional Perfectly Matched Layer(s) (CPML) and Auxiliary Differential Equations PML (ADE-PML). In recent years, the NPML method has been implemented using only one of three complex parameters. In this paper we have implemented our suggested method based on ADE-PML method & we have used all three PML complex parameters. We derive Auxiliary Differential Equations Perfectly Matched Layer (ADE-PML) absorbing boundary conditions of direct applicability to second-order wave equations of interest in seismic modeling. Specifically, ADE-PML equations are derived for the scalar acoustic wave equation and for TTI pseudo acoustic wave equations.

Keywords: Perfectly Matched Layers (PML), Convolutional Perfectly Matched Layers (CPML), Auxiliary Perfectly Matched Layers (ADE-PML), Nearly Perfectly Matched Layer (NPML), second-order wave equations, pseudo acoustic wave equation, Tilted Transvers Isotropic (TTI).

مقدمه

یکی از قدرت‌مندترین و موثرترین شرایط مرزی جاذب برای حوزه‌های محاسباتی محدود، لایه‌های کاملاً هم‌مجور یا Perfectly Matched Layer (PML) است که اولین بار توسط برنجر (۱۹۹۶-۱۹۹۴) معرفی شد. تحقیقات بسیار زیادی به منظور حل موثر و آسان مسائل PML انجام شده است. یکی از گسترده‌ترین فرمول‌های استفاده شده لایه‌های کاملاً هم‌مجور هم‌آمیخت یا Convolutional Perfectly Matched Layer (CPML) است که توسط رادن و گدنی (۲۰۰۰) ارائه شد. در CFS-CPML متغیر مختلط در حوزه‌ی بسامد بر روی متغیرهای مکانی پیاده‌سازی شده که همین موضوع باعث می‌شود تا انرژی موج برخوردی در داخل ناحیه‌ی PML به صورت نمایی کاهش پیدا کند. بنابراین برای اعمال PML در حوزه‌ی زمان تبدیل فوریه معکوس و انجام کانونولوشن بسیار ضروری است. انجام کانونولوشن پیاده‌سازی را برای این روش مرزی مشکل می‌کند، بنابراین یک معادله‌ی اضافی با نام معادله‌ی بازگشتی از سوی رادن و گدنی (۲۰۰۰) به منظور اعمال بر روی معادلات CPML معرفی شده است.

روش ADE-PML با بکارگیری یک پارامتر از سه پارامتر کاهیدگی پیاده‌سازی و مقالات آن توسط هو و همکارانش (۲۰۰۷) و ری مک‌گری و مقدم (۲۰۰۹) چاپ شده است. فرمول‌های ارائه شده بر اساس روابطی که مقدم و مک‌گری (۲۰۰۹) بر روی معادلات موج صوتی (آکوستیک) مرتبه‌ی دوم پیاده‌سازی کرده‌اند بدست آمده است. در این مقاله روش ADE-PML را برای محیط همسانگرد و محیط همسانگرد جانبی TTI یا Tilted Transverse Isotropic پیاده‌سازی می‌کنیم.

۲ روش تحقیق

معادلات PML با اعمال کردن پارامتر مختلط s_i بر روی معادله‌ی موج صوتی در حوزه‌ی بسامد (فرکانس) و تبدیل آن به حوزه‌ی زمان بدست می‌آیند. پارامتر مختلط s_i در حوزه‌ی بسامد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s_i = \sigma_i + k_i \alpha_i \quad (1)$$

در رابطه‌ی ۱ ω بسامد زاویه‌ای می‌باشد؛ σ_i فاکتور میرایی است که جذب موج صوتی را در داخل ناحیه‌ی PML کنترل می‌کند. k_i و α_i نیز پارامترهای کاهیدگی هستند. در این مقاله، ما معادلات موج مرتبه‌ی دوم را به صورت معادلات موج مرتبه‌ی اول درگیر بازنویسی کرده و به جای استفاده از متغیر جابجایی از متغیر جابجایی مختلط استفاده کرده ایم.

$$\bar{v}^i = v^i + \frac{v^i}{s_i} \quad (2)$$

$$\bar{p}^i = p^i + \frac{p^i}{s_i} \quad (3)$$

با معرفی متغیر جابجایی مختلط \bar{v}^i ، به راحتی و بدون نیاز به کانولوشن می‌توانیم به PML اصلی در حوزه‌ی زمان دسترسی داشته باشیم. بر طبق تحقیقات مک‌گری و مقدم (۲۰۰۹) برای دستیابی به معادلات موج در حوزه‌ی زمان کاهیدگی را بر روی متغیرهای P و V اعمال کرده ایم:

$$k_i \frac{\partial \bar{p}^i}{\partial t} + (\sigma_i + k_i \alpha_i) \bar{p}^i = \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_i p \quad (4)$$

$$k_i \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial t} + (\sigma_i + k_i \alpha_i) \bar{v}^i = -\frac{\partial v^i}{\partial t} + \alpha_i v^i \quad (5)$$

در معادلات (۴) و (۵) \bar{p}^i و \bar{v}^i به ترتیب میدان موج و جابجایی کاهیده می‌باشند. پس از انجام محاسبات در نهایت معادله موج اسکالر صوتی برای محیط همسانگرد (معادله موج بهنگام شده) (تغییرات پارامتر k_i کوچک فرض شده است) به صورت رابطه‌ی ۶ بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad (6)$$

پیاده‌سازی معادله موج صوتی (آکوستیک) در محیط TTI

برای بدست آوردن معادلات TTI، از معادلات پایدار VTI که اولین بار از سوی دوونوک و همکارانش (۲۰۰۸) معرفی شده است استفاده کرده ایم:

$$(7)$$

$$\frac{1}{v}$$

در معادله‌ی فوق p و r به ترتیب مولفه‌های افقی و عمودی تنش و ε و δ پارامترهای ناهمسانگردی تامسون (تامسون، ۱۹۸۶) می‌باشند. معادلات موج صوتی TTI با چرخش معادلات VTI (معادله ۷) حول محور تقارن و با توجه به ماتریس دوران بدست می‌آیند. بعد از چرخش دستگاه مختصات سیستم معادلات زیر را در داخل ناحیه‌ی PML داریم:

(۸)

$$\frac{1}{k}\sqrt{1+2\delta}\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^x}{\partial x^2} + \cos^2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^z}{\partial z^2} + \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^x}{\partial x\partial z} + \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^z}{\partial x\partial z}\right) + \frac{1}{k}\sqrt{1+2\delta}\sin^2\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}[\sigma_x\bar{r}_x^x]\right) + \frac{1}{k}\sqrt{1+2\delta}\sin^2\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}[\sigma_z\bar{r}_z^z]\right)$$

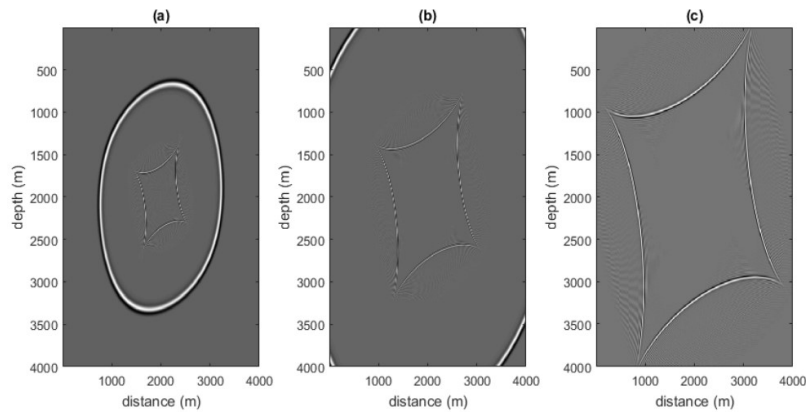
$$\frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{1}{k}\sqrt{1+2\delta}\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2\bar{p}^x}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2\bar{p}^z}{\partial z^2} - \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{p}^x}{\partial x\partial z} - \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{p}^z}{\partial x\partial z}\right) + \frac{1}{k}\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^x}{\partial x^2} + \cos^2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^z}{\partial z^2} + \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^x}{\partial x\partial z} + \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^z}{\partial x\partial z}\right) + \frac{1}{k}\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^x}{\partial x^2} + \cos^2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^z}{\partial z^2} + \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^x}{\partial x\partial z} + \sin 2\theta\frac{\partial^2\bar{r}^z}{\partial x\partial z}\right) + \frac{1}{k}\sqrt{1+2\delta}\cos^2\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}[\sigma_x\bar{p}_x^x]\right) + \frac{1}{k}\sqrt{1+2\delta}\sin^2\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}[\sigma_z\bar{p}_z^z]\right)$$

(۹)

برخی از جملات در معادله ۹ با رنگ قرمز مشخص شده‌اند، این عبارات با توجه به قواعد ریاضی و از معادلات ۵، ۶ و ۷ حاصل شده‌اند؛ اما اعمال آن‌ها در منطقه‌ی PML باعث بروز ناپایداری در این ناحیه می‌شود. بدست آوردن معادلات PML بدون در نظر گرفتن این عبارات باعث شد تا به نتایج موثر و پایداری در محیط TTI برسیم.

مثال

در این قسمت یک مثال تصویرباز تاثیر شرایط مرزی جدید (ADE-PML) ارائه می‌دهیم. برای این منظور انتشار موج صوتی دو بعدی در محیط TTI مدل‌سازی شده است. مدل‌سازی با سرعت موج ۳۰۰۰ متر بر ثانیه و زاویه‌ی شیب ۶۰ درجه انجام شده است. مقدار در نظر گرفته شده برای پارامترهای ϵ و μ به ترتیب ۰/۲ و ۰/۰۵، ابعاد مدل ۴ کیلومتر در ۴ کیلومتر، فاصله گره‌ها از یکدیگر ۴ متر و چشمه ایجاد کننده موج از نوع ریکر با بسامد غالب ۳۰ هرتز می‌باشد. در محاسبات، مشتق مکانی مرتبه ۸ و مشتق زمانی مرتبه ۲ بکار برده شده‌اند.



شکل ۱. تصاویر انتشار موج صوتی در محیط TTI در زمان‌های ۰.۴۴، (a)، ۰.۸۴، (b) و ۱ (c) ثانیه.

۳ نتیجه گیری

ما توانستیم شرایط مرزی ADE-PML را با پیاده‌سازی مستقیم بر روی سیستم معادلات موج صوتی مرتبه دوم بدست آوریم. مزیت مهم روش ADE-PML در کاهش دادن حجم محاسبات، ساده‌سازی مراحل پیاده‌سازی و حفظ چارچوب اصلی CFS-PML می‌باشد. نتایج روش پیشنهادی ما در محیط TTI نشان می‌دهد که میزان بازتاب‌ها به کمتر از یک درصد کاهش یافته است.

منابع

- Berenger, J. P., (1994). "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves." *Journal of computational physics* 114, 185-200.
- Berenger, J. P., (1996). "Perfectly matched layer for the FDTD solutions of wave structure interaction problems." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 44, 110-117.
- Duveneck, E., Milcik P., Bakker, P.M., Perkins, C., (2008). Acoustic VTI wave equations and their application for anisotropic reverse-time migration. SEG Technical Program Expanded Abstracts 2008: *Society of Exploration Geophysicists*; p. 2186-90.
- Hu, W., A. Abubakar et al., (2007). "Application of the nearly perfectly matched layer in acoustic wave modeling." *Geophysics* 72, 169-175.
- McGarry, R. , P. Moghaddam , (2009). NPML boundary conditions for second-order wave equations. SEG Technical Program Expanded Abstracts 2009, *Society of Exploration Geophysicists*: 3590-3594.
- Pasalic, D., McGarry R., (2010). Convolutional perfectly matched layer for isotropic and anisotropic acoustic wave equations. SEG Technical Program Expanded Abstracts: *Society of Exploration Geophysicists*; 2010. p. 2925-9.
- Roden, J. A., S. D. Gedney, (2000). "Convolutional PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media." *Microwave and optical technology letters* 27, 334-338.
- Thomsen, L., (1986). Weak elastic anisotropy. *Geophysics* 51, 1954-66.