

الگوریتمی سریع برای وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی با استفاده از تجزیه مقادیر تکین تصادفی

سعید وطن‌خواه^۱، وحید ابراهیم‌زاده اردستانی^۲، رزماری رنات^۳

^۱استادیار، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، svatan@ut.ac.ir

^۲استاد، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ebrahimz@ut.ac.ir

^۳استاد، دانشگاه ایالتی آریزونا، renaut@asu.edu

چکیده

الگوریتمی سریع برای حل مساله وارون خطی بزرگ مقیاس داده‌های گرانی‌سنجی بر اساس تجزیه مقادیر تکین تصادفی توسعه داده شده است. الگوریتم ارائه‌شده از عبارت تنظیم‌نرم یک در تابع هدف استفاده می‌کند، بنابراین توانایی بازسازی ساختارهایی با مرزهای تیز و گسسته را دارد. تجزیه مقادیر تکین تصادفی در حل مساله مورد استفاده قرار می‌گیرد به طوری که در هر تکرار، سیستم خطی بزرگ مقیاس اولیه با سیستمی با ابعاد بسیار کوچک‌تر جایگزین می‌گردد. نتایج دلالت بر آن دارد که مقادیر تکین ماتریس تصویر شده در زیرفضا، تقریب خوبی از مقادیر تکین بزرگ ماتریس اصلی هستند. پارامتر تنظیم در زیرفضا با استفاده از روش (Unbiased Predictive Risk Estimator) UPRE تعیین می‌گردد. روش ارائه‌شده بر روی مدل مصنوعی و نیز داده واقعی مربوط به منطقه مورو دو اینزنه‌و در مرکز برزیل مورد آزمون قرار گرفته و نتایج آن ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: گرانی‌سنجی، وارون‌سازی، مسائل بزرگ مقیاس، تجزیه مقادیر تکین تصادفی، ماتریس رتبه کاهیده، پارامتر تنظیم

A fast algorithm for inversion of gravity data using randomized singular value decomposition

Vatankhah, S.¹, Ardestani, V. E.², Renaut, R. A.³

¹Assistant Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, svatan@ut.ac.ir

²Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, ebrahimz@ut.ac.ir

³Professor, Arizona State University, renaut@asu.edu

Abstract

A fast algorithm for solving large-scale linear inversion of gravity data based on the randomized singular value decomposition (RSVD) is developed. The algorithm combines an iteratively reweighted approach for L1-norm regularization with the RSVD methodology in which the large scale linear system at each iteration is replaced with a much smaller system. The results indicate that the singular values generated using the RSVD yield a good approximation of the dominant singular values of the large scale system matrix. The regularization parameter in subspace is estimated using the method of unbiased predictive risk estimator (UPRE). The algorithm has been tested on synthetic model along with the real gravity data from the Morro do Engenho complex from central Brazil.

Keywords: Gravimetry, Inversion, Large-scale problems, RSVD, Low-rank approximation, regularization parameter

۱ مقدمه

در طی سالیان اخیر الگوریتم‌های مختلفی برای حل مساله وارون خطی گرانی‌سنجی توسعه یافته‌اند. در این میان بدون شک الگوریتمی کارا است که علاوه بر حل مشکل عدم پایداری جواب مساله وارون، امکان استفاده از اطلاعات زمین‌شناسی و ژئوفیزیکی موجود برای حل مساله را به کاربر بدهد. علاوه بر آن چنین الگوریتمی بایستی بتواند فضای جستجوی مدل را به سمت مدل‌های خاص و مورد نظر کاربر سوق دهد. در نهایت الگوریتمی کامل است که راه‌کاری مناسب برای حل عددی جواب مساله وارون ارائه دهد، به طوری که کاربر در زمان قابل قبولی بتواند جواب مساله را محاسبه نماید. پژوهش حاضر تلاش دارد تا با در نظر گرفتن موارد ذکر شده در بالا به ارائه الگوریتمی موثر برای وارون‌سازی خطی داده‌های گرانی بپردازد.

امروزه به طور کلی روش‌های موجود در وارون گرانی‌سنجی را می‌توان در دو دسته عمده قرار داد: الگوریتم‌های که به حصول جواب‌هایی هموار از توده زیرسطحی منجر می‌شوند (لی و اولدنبرگ ۱۹۹۸) و آنهایی که توانایی بازسازی مرزهای تیز و گسسته با محیط پیرامونی برای توده مورد جستجو را دارند (لاست و کوپیک ۱۹۸۳؛ پورتنی‌گوبین و ژادائف ۱۹۹۹؛ فارکوهارسون ۲۰۰۸؛ وطن‌خواه و همکاران ۲۰۱۷). در مقاله حاضر فرض بر آن است که بازسازی تصاویری با مرزهای تیز مورد نظر است، بنابراین الگوریتم وارون‌سازی مبتنی بر استفاده از تنظیم‌کننده نرم یک، که توسط وطن‌خواه و همکاران (۲۰۱۷) توسعه داده شده است، به کار خواهد رفت. در حل مساله وارون گرانی‌سنجی هنگامی که ابعاد ماتریس ضرائب کوچک باشد می‌توان از تجزیه مقادیر تکین (SVD) برای حل عددی مساله استفاده کرد. برای مسائل با ابعاد بزرگ استفاده از تجزیه مقادیر تکین بسیار زمان‌بر است و یا آن‌که عملاً امکان‌پذیر نیست و بنابراین روش‌های پیشرفته‌تری برای حل عددی بایست به کار رود. یکی از پرکاربردترین شیوه‌هایی که تاکنون مورد استفاده بوده است استفاده از الگوریتم LSQR بر مبنای دو قطری‌سازی گلوب-کاهان است. وطن‌خواه و همکاران (۲۰۱۷) نیز از این روش برای حل عددی الگوریتم پیشنهادی خود استفاده کردند. روش دیگری که امروزه در حوزه علوم رایانه بسیار رواج یافته است استفاده از تجزیه مقادیر تکین تصادفی (Randomized SVD) ماتریس ضرائب است (هالکو و همکاران ۲۰۱۱؛ ژانگ و زو ۲۰۱۳). در این حالت یک تقریب رتبه پایین از ماتریس ضرائب بدست می‌آید، سپس تجزیه مقادیر تکین این ماتریس رتبه پایین محاسبه می‌شود. در پژوهش حاضر الگوریتمی برای تجزیه مقادیر تکین تصادفی یک ماتریس ارائه خواهد شد. از ترکیب الگوریتم ارائه شده با الگوریتم وارون‌سازی نرم یک، الگوریتمی بسیار سریع برای وارون‌سازی تَنک داده‌های گرانی‌سنجی حاصل می‌گردد (وطن‌خواه و همکاران ۲۰۱۸). توانایی و سرعت الگوریتم ارائه شده با الگوریتم وارون‌سازی بر مبنای دو قطری‌سازی گلوب-کاهان مقایسه خواهد شد.

۲ روش تحقیق

۲-۱ تئوری روش: سطح زیرین در ناحیه برداشت داده به تعداد زیادی مکعب با ابعاد ثابت تقسیم شده است. چگالی مکعب‌ها به عنوان پارامترهای نامعلوم در بردار $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ قرار دارد. همچنین داده‌های برداشت شده در بردار $\mathbf{d}^{\text{obs}} \in \mathbb{R}^m$ در نظر گرفته می‌شوند. رابطه زیر بین این دو برقرار است:

$$\mathbf{d}^{\text{obs}} = \mathbf{G}\mathbf{m} \quad (1)$$

در رابطه (۱) ماتریس $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ عملگر پیشرو نامیده می‌شود. هدف آن است که با استفاده از \mathbf{d}^{obs} و \mathbf{G} معلوم، جوابی تقریبی برای \mathbf{m} محاسبه گردد. این جواب علاوه بر برآوردن شرایط معادله (۱) همزمان باید از لحاظ زمین‌شناسی نیز قابل قبول باشد. در پژوهش حاضر از الگوریتم منظم‌سازی نرم یک که توسط وطن‌خواه و همکاران (۲۰۱۷) توسعه داده شده است استفاده خواهد شد. در این شیوه، جواب مساله (۱) از کمینه‌کردن تابع زیر محاسبه می‌شود:

$$P^\alpha(\mathbf{m}) = \|\mathbf{W}_d(\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}^{\text{obs}})\|_2^2 + \alpha^2 \|\mathbf{W}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{apr}})\|_2^2 \quad (2)$$

در رابطه (۲)، \mathbf{W}_d ماتریسی قطری شامل وارون انحراف معیارهای نوفه موجود در داده است، α پارامتر تنظیم، \mathbf{m}_{apr} مدل اولیه و ماتریس منظم‌سازی \mathbf{W} از حاصلضرب سه ماتریس قطری $\mathbf{W}_L \mathbf{W}_z \mathbf{W}_h$ ساخته می‌شود. ماتریس \mathbf{W}_z ماتریس وزن-دهی عمقی است که توسط لی و اولدنبرگ (۱۹۹۸) معرفی شد. ماتریس \mathbf{W}_h ماتریس قیود سخت (Hard constraint) نامیده می‌شود. این ماتریس زمانی استفاده می‌شود که چگالی برخی از بلوک‌ها بر اساس اطلاعات پیشین معلوم باشد. در این حالت چگالی‌های معلوم در بردار \mathbf{m}_{apr} قرار داده می‌شوند و ماتریس \mathbf{W}_h طوری انتخاب می‌شود که در رابطه قطری مربوط به آن مکعب‌ها یک عدد بزرگ باشد، بقیه عناصر روی قطر برابر یک در نظر گرفته می‌شوند. این سبب خواهد شد که در طول وارون‌سازی چگالی برای بلوک‌های انتخابی ثابت بماند و وارون‌سازی به دنبال یافتن چگالی دیگر سلول‌ها باشد. ماتریس $\mathbf{W}_L = \text{diag}(1/((\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{apr}})^2 + \varepsilon^2)^{1/4}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریسی است که به علت تقریب زدن منظم‌کننده نرم یک با منظم‌کننده نرم دو پدیدار شده است. پارامتر بسیار کوچک $\varepsilon^2 = 10^{-9}$ پایداری را در حالت $\mathbf{m}_{\text{apr}} \leftarrow \mathbf{m}$ فراهم می‌آورد. با توجه به آن که ماتریس \mathbf{W} قطری است، لذا وارون‌پذیر می‌باشد و تابع هدف رابطه (۲) به شکل تابع استاندارد تیخونف نوشته می‌شود:

$$P^\alpha(\mathbf{h}) = \|\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{h} - \tilde{\mathbf{r}}\|_2^2 + \alpha^2 \|\mathbf{h}\|_2^2 \quad (3)$$

در این رابطه $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}_d \mathbf{G}\mathbf{W}^{-1}$ ، $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{W}_d(\mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathbf{G}\mathbf{m}_{\text{apr}})$ و $\mathbf{h} = \mathbf{W}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{apr}})$ می‌باشند. کمینه‌کردن رابطه (۳) جواب زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{h}(\alpha) = (\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{G}} + \alpha^2 \mathbf{I}_n)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{r}} \quad (۴)$$

و جواب نهایی برای مساله وارون از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\mathbf{m}(\alpha) = \mathbf{m}_{apr} + \mathbf{W}^{-1} \mathbf{h}(\alpha) \quad (۵)$$

ماتریس \mathbf{W}_{L_1} وابسته به پارامترهای مدل است، لذا عبارت تنظیم در رابطه (۲) شامل تابعی غیرخطی از پارامترهای مدل می-باشد. بنابراین یک الگوریتم تکرار برای حل مساله وارون به کار می-رود. در هر تکرار ماتریس \mathbf{W}_{L_1} با استفاده از مقادیر پارامترهای مدل در تکرار قبل محاسبه و به کار برده می-شود. تکرارها زمانی متوقف می-شوند که شرط برازش داده برآورده شود و یا آن که الگوریتم به بیشینه تعداد تکرارها برسد. همچنین کران بالا و پایین برای چگالی می-بایست به کار رود. جزئیات این الگوریتم تکرار در وطن خواه و همکاران (۲۰۱۸) آورده شده است. هنگامی که ابعاد ماتریس کرنل کوچک است، رابطه (۴) با استفاده از تجزیه مقادیر تکین معمولی قابل محاسبه خواهد بود. برای ماتریسهای بزرگ، بایستی روشهای پیشرفته تری جایگزین گردد. در این مقاله از تجزیه مقادیر تکین تصادفی استفاده می-شود. این شیوه از نمونه گیری تصادفی استفاده کرده و زیرفضایی با ابعاد بسیار کوچک تر می-سازد. زیرفضای ساخته شده قسمت اعظم خاصیت طیفی ماتریس اصلی را در بر دارد. سپس ماتریس اصلی در این زیرفضا محدود می-شود، و در پایان یک فاکتورگیری استاندارد مانند تجزیه مقادیر تکین و یا تجزیه مقادیر ویژه بر روی ماتریس کاهش یافته به کار می-رود (الگوریتم ۱).

الگوریتم ۱. تجزیه مقادیر تکین تصادفی.

ورودی ها: ماتریس $\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m < n$)، رتبه ی ماتریس هدف (q) و یک پارامتر کوچک p به طوری که $q + p = l \ll m$.
خروجی ها: ماتریس های مقادیر تکین (Σ_q) و بردارهای تکین \mathbf{V}_q و \mathbf{U}_q
مرحله ۱. تولید ماتریس تصادفی گوسی $\Omega \in \mathbb{R}^{l \times m}$
مرحله ۲. محاسبه ماتریس $\mathbf{Y} = \Omega \tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{l \times n}$
مرحله ۳. محاسبه ماتریس متعامد $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ با فاکتورگیری QR از ماتریس $\mathbf{Y}^T = \mathbf{Q} \mathbf{R}$
مرحله ۴. تشکیل ماتریس $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times l}$
مرحله ۵. محاسبه $\mathbf{B}^T \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l \times l}$
مرحله ۶. محاسبه تجزیه مقادیر ویژه ماتریس $[\tilde{\mathbf{V}}_l, \mathbf{D}_l] = \text{eig}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})$
مرحله ۷. محاسبه $\mathbf{U}_q = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{V}}_q(:, 1:q) \Sigma_q^{-1}$ و $\Sigma_q = \sqrt{\mathbf{D}_l}(1:q, 1:q)$ ، $\mathbf{V}_q = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{V}}_l(:, 1:q)$
خروجی ها: تقریب رتبه پایین $\tilde{\mathbf{G}}_q = \mathbf{U}_q \Sigma_q \mathbf{V}_q^T$ به طوری که $\mathbf{U}_q \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ، $\Sigma_q \in \mathbb{R}^{q \times q}$ و $\mathbf{V}_q \in \mathbb{R}^{n \times q}$

هنگامی که $l \ll m \ll n$ باشد، هزینه محاسباتی الگوریتم ۱ تقریباً برابر $6lmn$ است، وطن خواه و همکاران (۲۰۱۸)، در حالی که برای تجزیه مقادیر تکین معمولی این هزینه برابر $6nm^2 + 20m^3$ می-باشد. بررسی هایی انجام گرفته دلالت بر آن دارد که $q \geq m/6$ انتخاب مناسبی برای وارون سازی گرانی است.

در مقاله حاضر پارامتر تنظیم α با استفاده از روش UPRE تخمین زده می-شود:

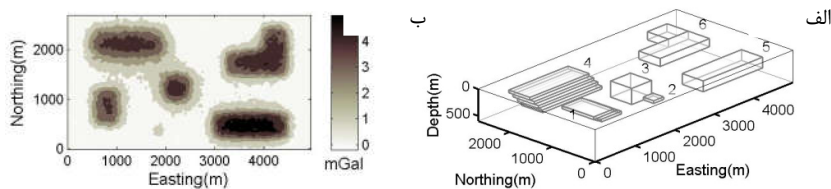
$$U(\alpha) = \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{\sigma_i^2 \alpha^{-2} + 1} \right)^2 (\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{r}})^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^q \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \right) - q \quad (۶)$$

که σ_i ها مقادیر تکین بدست آمده از الگوریتم ۱ هستند. عملاً برای کمینه کردن تابع $U(\alpha)$ محدوده بین بزرگترین و کوچکترین مقادیر تکین به تعداد زیادی α تقسیم می-شود، پارامتری که به ازای آن تابع $U(\alpha)$ کمینه باشد به عنوان پارامتر بهینه انتخاب خواهد شد.

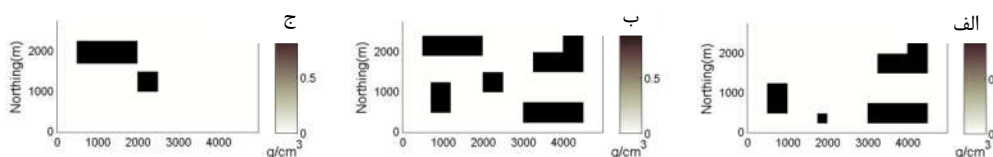
۲-۲ مدل مصنوعی

مدل مصنوعی متشکل از شش جسم با ابعاد و هندسه متفاوت تولید شده است (شکل ۱ الف). شکل ۲، سه سطح مقطع از مدل در عمق های مختلف را نشان می-دهد. داده حاصل از این مدل در شبکه ای شامل 55×100 ایستگاه مشاهده ای با فاصله ۵۰ متر بر روی سطح زمین تولید گردید. نوفه گوسی با انحراف معیار $\| \mathbf{d}^{\text{exact}} \|_2 + 0.001$ (۰.۰۲) به هر داده اضافه شده است. شکل ۱ (ب) داده تولید شده توسط این مدل و آمیخته به نوفه را نشان می-دهد. برای وارون سازی سطح زیرین به

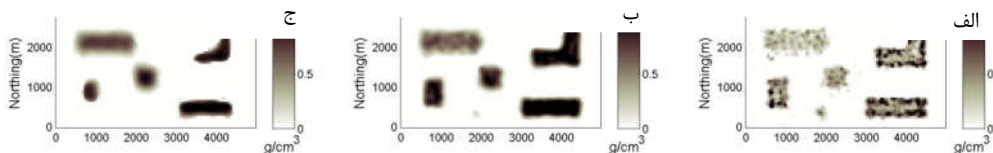
۶۶۰۰ مکعب با ابعاد یکسان تقسیم شده است. وارون‌سازی برای مقادیر مختلف q انجام شده است که نتایج یک نمونه آن در جدول ۱ آورده شده است. همچنین در این جدول نتایج اجرای یک نمونه از الگوریتم LSQR جهت مقایسه نشان داده شده است. مشخص است که الگوریتم ارائه شده در این پژوهش زمان محاسباتی بسیار کمتری نیاز دارد. شکل ۳ مدل ساخته شده با استفاده از الگوریتم تجزیه مقادیر تکین تصادفی را نمایش می‌دهد.



شکل ۱. (الف) مدل شامل ۶ جسم با شکل و ابعاد متفاوت، همگی دارای تباین چگالی چگالی 1 gr/cm^3 با محیط دربرگیرنده؛ (ب) داده حاصل از مدل در سطح زمین که با نوفه نیز آمیخته شده است.



شکل ۲. سطح مقطع‌هایی از مدل ارائه شده در شکل الف در اعماق (الف) ۵۰m؛ (ب) ۱۵۰m؛ (ج) ۲۵۰m.



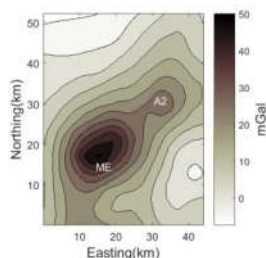
شکل ۳. سطح مقطع‌هایی از مدل بازسازی شده برای داده شکل ۱ (ب) با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و مقدار $q=1000$. مقاطع در اعماق (الف) ۵۰m؛ (ب) ۱۵۰m؛ (ج) ۲۵۰m.

جدول ۱. نتایج وارون‌سازی برای مدل مصنوعی.

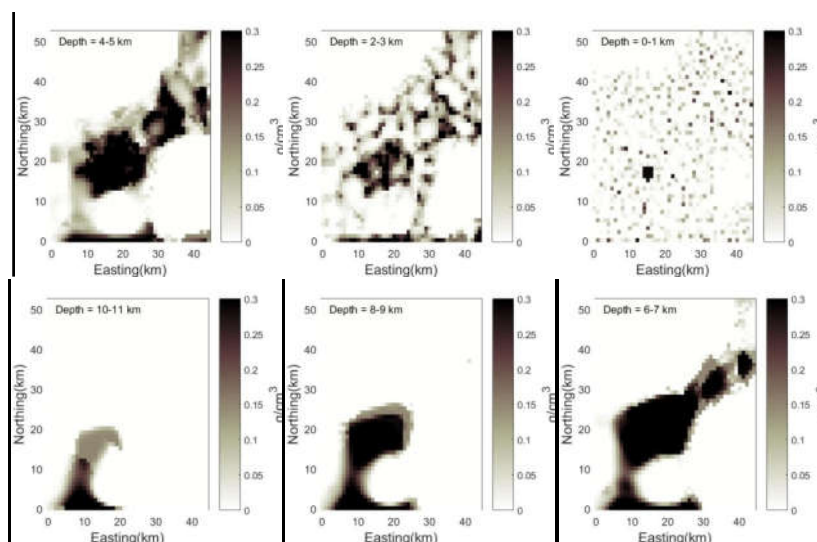
روش	مقدار q یا t	خطای نسبی	پارامتر تنظیم در تکرار آخر	تعداد تکرارهای مورد نیاز برای توقف	زمان (ثانیه)
RSVD	$q=1000$	۰/۶۵۵۶	۱۱/۳۹	۱۰	۲۱۹/۴
LSQR	$t=1000$	۰/۶۵۲۶	۱۰/۶۲	۱۰	۴۶۴۲/۹

۳-۲ داده واقعی

داده منطقه مورو دو اینزنهو در مرکز برزیل مورد استفاده قرار گرفته است. تعداد داده‌ها برابر ۲۳۸۵ و تعداد پارامترهای مدل برابر ۳۳۲۹۰ می‌باشد. بر اساس اطلاعات زمین‌شناسی حاصل از رخنمون‌ها، تعداد ۹ مکعب در لایه اول با تباین چگالی معلوم در وارون‌سازی شرکت می‌کنند. شکل ۵ نتایج وارون‌سازی را نشان می‌دهد. الگوریتم بعد از ۱۴ تکرار و در زمان ۴۲ ثانیه متوقف شده است.



شکل ۴. آنومالی گرانی بر روی منطقه مورو دو اینزنهو در مرکز برزیل. اقتباس شده از دوترا و مارانگونی (۲۰۰۹).



شکل ۵. مدل ساخته شده برای داده شکل ۴ با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و مقدار پارامتر $q=400$. عمق مربوط به هر سطح مقطع در شکل آورده شده است.

۳ نتیجه‌گیری

الگوریتمی سریع برای وارون‌سازی سه‌بعدی داده‌های گرانی‌سنجی براساس تجزیه مقادیر تکین تصادفی ارائه شد. برای حل عددی مساله وارون، در ابتدا ماتریس ضرائب سیستم اولیه با ماتریسی رتبه کاهیده تقریب زده شد، سپس تجزیه مقادیر تکین این ماتریس محاسبه گردید. نشان داده شد که هزینه محاسباتی الگوریتم ارائه‌شده در مقایسه با تجزیه مقادیر تکین استاندارد بسیار کمتر است. کارایی الگوریتم ارائه‌شده با استفاده از مدل مصنوعی و نیز داده واقعی از ناحیه مورو دو ایژنهو برزیل بررسی گردید.

۴ تقدیر و تشکر

این پژوهش در غالب طرح پژوهشی شماره ۳۰۶۷۴/۱/۰۱ با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه تهران انجام شده است. بدین‌وسیله از معاونت پژوهشی دانشگاه تهران برای حمایت مالی از این طرح قدردانی می‌گردد.

منابع

- Dutra, A. C., and Marangoni, Y. R., 2009, Gravity and magnetic 3D inversion of Morro do Engenho complex, Central Brazil, *Journal of South American Earth Sciences*, **28**, 193-203.
- Farquharson, C. G., 2008, Constructing piecewise-constant models in multidimensional minimum-structure inversion, *Geophysics*, **73**, **1**, K1-K9.
- Halko, N., Martinsson, P. G., and Tropp, J. A., 2011, Finding structure with randomness: Probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions, *SIAM Review*, **53**, (2), 217-288.
- Last, B. J., and Kubik, K., 1983, Compact gravity inversion, *Geophysics*, **48**, 713-721.
- Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1998, 3-D inversion of gravity data, *Geophysics*, **63**, 109-119.
- Portniaguine, O., and Zhdanov, M. S., 1999, Focusing geophysical inversion images, *Geophysics*, **64**, 874-887.
- Vatankhah, S., Renaut, R. A., Ardestani, V. E., 2017, 3-D Projected L1 inversion of gravity data using truncated unbiased predictive risk estimator for regularization parameter estimation, *Geophysical Journal International*, **210**, 1872-1887.
- Vatankhah, S., Renaut, R. A., Ardestani, V. E., 2018, A fast algorithm for regularized focused 3-D inversion of gravity data using the randomized singular value decomposition, *Geophysics*, **accepted**, arXiv:1706.06141v1.
- Xiang, H., and Zou, J., 2013, Regularization with randomized SVD for large-scale discrete inverse problems, *Inverse Problems*, **29**, 085008.